

TD 11 : Équations différentielles

Équations différentielles d'ordre 1

1 ★★ (ED linéaires d'ordre 1) Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1) $y' + y = e^x$ | 4) $(1 + e^x)y' + e^x y = 0$ |
| 2) $y' - y = 1 + e^x$ | 5) $\operatorname{ch} x y' - \operatorname{sh} x y = \operatorname{sh}^3 x$ |
| 3) $y' - 2y = e^x \cos(2x)$ | 6) $(1 + x^2)y' + 2xy = -1$ |

2 ★★ (Problèmes de Cauchy d'ordre 1) Résoudre les équations suivantes :

- 1) $\begin{cases} y' + y = \frac{1}{1 + e^x} \\ y(\ln 2) = 0 \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} y' - 2xy = -(2x - 1)e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} y' + \arctan(\sqrt{1 + e^x})y = 0 \\ y(\pi e^{-1}) = 0 \end{cases}$

3 ★★ (ED linéaires d'ordre 1, bis) Résoudre les équations suivantes sur un intervalle I convenable (s'il y en a plusieurs, choisissez-en un) :

- 1) $xy' - 2y = 4 \ln x$
- 2) $\sqrt{1 - x^2} y' + y = 1$
- 3) $\begin{cases} y' - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} y = e^{\arccos x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} y' - \tan(x)y = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

4 ★★★ (ED avec raccord) On considère l'équation (E) : $xy' + y = 0$.

- 1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
- 2) Si y est une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$, que serait la valeur de $y(0)$?
- 3) Peut-on trouver une solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

5 ★★★ Soit a, b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'ED

$$(E) : y' + a(t)y + b(t)y^2 = 0$$

On admettra que, si y est une solution qui n'est pas identiquement nulle, alors y ne s'annule jamais.

- 1) Soit y une solution de (E) non identiquement nulle. En posant $z = \frac{1}{y}$, se ramener à une équation linéaire en la fonction z .
- 2) Résoudre l'équation (E).

6 ★★★ Trouver les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation $y' + y = \int_0^1 y(t) dt$. On pourra raisonner par analyse-synthèse.

Équations différentielles d'ordre 2

7 ★★ (ED linéaires d'ordre 2) Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|-------------------------------|----------------------------|
| 1) $4y'' + 8y' + 5y = 2e^x$ | 4) $y'' + 4y = 3 \cos^2 x$ |
| 2) $y'' - 5y' + 4y = e^x$ | 5) $y'' + iy' = x + 3$ |
| 3) $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$ | 6) $y'' + 3y' - 4y = ix^2$ |

8 ★★ (Problème de Cauchy d'ordre 2) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

- | | |
|---|--|
| 1) $\begin{cases} y'' + 4y = \cos(3x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} y'' + 2y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ |
|---|--|

9 ★★★ (ED déphasée) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda - x)$$

- 1) Montrer que si f vérifie cette condition, alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 2) En déduire l'ensemble des fonctions f vérifiant cette condition.

10 ★★★

- 1) Montrer que l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$ possède une et une seule solution bornée sur $\mathbb{R}$.
- 2) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que l'équation $y'' + 2y' + 2y = f(x)$ possède au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$.

11 ★★★ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(-x) = e^x$$

Indication : en justifiant, on pourra dériver l'égalité ci-dessus et montrer que f vérifie une équation différentielle.